29.07.19

Beweis durch Kontraposition

Die *Kontraposition* wird formell geschrieben

$$V \Leftrightarrow H$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$$

Die Positionen von a und b haben sich vertauscht, sind jetzt sozusagen konträr.

„¬“ ist das logische Negationszeichen, „⇒“ ist das logische Folgerungszeichen (Implikationszeichen) und „⇔“ ist die logische Äquivalenz (aus V folgt H und aus H folgt V. Oder: aus **V**orne folgt **H**inten und aus **H**inten folgt **V**orne).

An einem Alltags-Beispiel erklärt:

a ⇒ b soll bedeuten: **wenn** ich ***a***lkohol trinke, **dann** werde ich ***b***lau

⇔ dies ist **gleichbedeutend mit** oder **dasselbe wie**:

¬b **wenn** ich ***nicht blau*** bin, ⇒ ¬a, **dann** habe ich auch **nicht *a***lkohol getrunken. Oder: nicht blau, dann nicht alk.

Die Kontraposition setzt offenbar eine klare Alternative, also strikte Zweiwertigkeit voraus. Irgendein dreiwertiger Kuddelmuddel erzeugt zumindest Probleme: also z.B. ich hab *nur wenig* alk getrunken, also bin ich auch nicht blau. Wenn ich andererseits sage: *erst bei viel* alk werde ich blau, taucht sofort die Frage auf: ab wieviel? – Trotzdem, als Faustregel gilt im Prinzip die Kontraposition auch im Alltag, nämlich wenn *annähernde* Zweiwertigkeit vorhanden ist. Die Alltagssprache zeichnet sich ja unter anderem dadurch aus, dass sie eine gewisse Toleranz gegenüber Präzisionsanforderungen besitzt.

Weiteres Beispiel:

(V) Die Haustür ist auf, folglich kann jeder problemlos durch die Tür ins Haus. Dann lautet die Kontraposition: (H) keiner kommt problemlos durch die Tür ins Haus (auch kein Regen und kein Wind), folglich ist die Haustür zu. Und beide Aussagen V und H sind gleichbedeutend (d.i. logisch äquivalent).

In der Mathematik kann man diese Kontraposition als Beweisverfahren benutzen. Ein schönes Beispiel ist das folgende:

Behauptung: Für alle a, b $\in \mathbb{N}$ gilt: (V) $\{\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}}$ unkürzbar $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}$ unkürzbar$\}$.

$\frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$ ist unkürzbar und $\frac{5}{2}$ ist ebenfalls unkürzbar.

Die Zweiwertigkeit besteht in der strikten Alternative kürzbar vs. unkürzbar.

Die Kontraposition lautet entsprechend:

(H) $\{\frac{a}{b}$ kürzbar $\Rightarrow$ $\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}}$ kürzbar$\}$

Wenn ich diese Kontraposition H beweisen kann, habe ich damit auch die Behauptung V bewiesen, denn V $\Leftrightarrow$ H: Die Aussage V ist äquivalent der Aussage H.

Beweis: Wenn $\frac{a}{b}$ kürzbar ist, dann besitzen Zähler und Nenner einen gemeinsamen Teiler t, sodass Zahlen x und y existieren die folgendes erfüllen:

a = t $\cdot$ x und b = t $\cdot$ y oder $\frac{a}{b} = \frac{tx}{ty}$

Beispiel: $\frac{50}{25}$ hat den gemeinsamen Teiler t=5. Zähler und Nenner können also beide durch 5 geteilt werden. x wäre dann 10, und y wäre dann 5, denn

$$t \cdot x = 50 \text{ und } t \cdot y = 25 \text{ oder } \frac{50}{25} = \frac{5\cdot 10}{5\cdot 5}$$

Wenn dies der Fall ist, dann gilt folgendes:

a-b = t $\cdot$ x - t $\cdot$ y = t (x-y)

a+b= t $\cdot$ x + t $\cdot$ y = t (x+y)

Damit ist die Kürzbarkeit von $\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}}$ gezeigt. Denn

$\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}} = \frac{\mathrm{t\,(x+y)}}{\mathrm{t\,(x-y)}}$ oder $\frac{50+25}{50-25} = \frac{5\,(10+5)}{5\,(10-5)}$

d.h. auch der Bruch $\frac{a+b}{a-b}$ hat im Zähler und im Nenner den gemeinsamen Teiler t. Folglich ist er genauso kürzbar wie $\frac{a}{b}$.

Damit ist (H) die ***Kontraposition*** (d.i. die Kürzbarkeit) bewiesen, was nichts anderes bedeutet, als dass (V) die ***Behauptung*** der Unkürzbarkeit stimmt. w.z.b.w.